



## SUPRESSÃO DE CAOS EM UM SISTEMA VIBRO – IMPACTO UTILIZANDO O PROJETO DE CONTROLE LINEAR ÓTIMO

RODRIGO FRANCISCO BORGES LOURENÇO<sup>1</sup>, FÁBIO ROBERTO CHAVARETTE<sup>2</sup>,  
EDSON ROBERTO DA SILVA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica,

<sup>2</sup>Departamento de Matemática

UNESP – Univ. Estadual Paulista.

Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS)

Rua Rio de Janeiro, 266 - CEP: 15385-000 Ilha Solteira, SP, Brasil.

*(Recibido 24 de agosto de 2017, revisado 6 de octubre de 2017, para publicación 1 de noviembre de 2017)*

**Resumo** – Vibrações mecânicas são comuns em equipamentos de engenharia e podem ser observadas sob forma de acelerações, deslocamentos e velocidade. Essas vibrações, na maioria dos sistemas dinâmicos, são consideradas como algo indesejado e podem ser danosas. Porém, existem situações que são utilizadas para melhorar o funcionamento e desempenho de máquinas. São diversas as causas de vibrações em sistemas de engenharia, neste trabalho, destacam-se as vibrações causadas por impacto. Quando componentes destes sistemas impactam entre si, causando ruídos de curta duração, são caracterizados como sistemas tipo vibro - impacto. Podem ser citados diversos equipamentos com essas características, como rolos compactadores de solo, martelos de impacto, perfuratrizes de solo, etc. Neste trabalho, demonstra-se o comportamento dinâmico de um sistema vibro – impactante. A partir da variação da frequência de excitação, foi observado um comportamento caótico. Diante disso, foi desenvolvido projeto de controlador linear ótimo, a fim de atenuar as vibrações nas regiões de operação nas quais o sistema é instável. Comprovou-se que a estratégia de controle linear ótimo demonstra eficiência para este tipo de situação e pode ser utilizada na redução de danos, evitando prejuízos econômicos, perdas biológicas e materiais.

**Palavras-chave** – Análise de estabilidade, caos, controle linear ótimo, simulação numérica, vibrações mecânicas.

### 1. INTRODUÇÃO

Há muitas atividades humanas que envolvem vibrações. O simples fato de se ouvir, respirar, andar ou enxergar está relacionado com alguma forma de vibrar das moléculas do corpo [8]. É muito comum que diversos objetos de nosso cotidiano apresentem vibrações, e elas podem ser representadas em forma de velocidade, acelerações e deslocamento [6].

Apesar de na maioria dos sistemas mecânicos de engenharia a presença de vibrações ser algo danoso e indesejado, existem situações em que é necessário o uso de impacto para gerar vibrações em certas partes do sistema. Sistemas mecânicos submetidos a esse tipo de excitação são denominados de vibro-impacto. O estudo desse fenômeno é evidenciado quando dois componentes em contato sofrem impactos entre si, gerando assim ruídos de curta duração [1]. Podem ser citados diversos equipamentos que utilizam impacto para o melhor desempenho de suas funções, sendo como exemplos britadeiras, máquinas compactadoras, furadeiras de impacto, entre outros diversos. Tratando-se de mecanismos de vibro-impacto, destaca-se o estudo em perfuratrizes de solo, que no geral são equipamentos muito robustos e que quando falham causam grandes danos [7]. Assim, cada vez mais se torna importante o estudo de mecanismos do tipo vibro-impacto, especialmente quando há presença de folga, pois sofrem com desgastes excessivos, elevados níveis de ruído, vibrações com grandes amplitudes, podendo muitas vezes gerar falhas prematuras. Portanto, estes estudos podem auxiliar na sua prevenção e controle de vibrações e ruídos dos sistemas [6].

Ing *et al.* [3] propôs um modelo experimental que abordava o comportamento de um sistema dinâmico (estável/instável), representado por dois graus de liberdade. Esse sistema estudado apresentava comportamentos diversos que iam de periódico a caótico. Com isso, os autores previram comportamentos e explicaram observações prévias. Tal estudo considerou sistemas fisicamente existentes, e também idealizados, para representarem condições de projetos.

Na maioria das aplicações, os testes experimentais têm custo elevado e envolvem algum perigo, por isso, a modelagem matemática da dinâmica dos sistemas se destaca como boa alternativa [5]. A modelagem matemática tem por finalidade representar aspectos importantes do sistema, com a meta de formular equações que representem seu comportamento [8]. Um bom modelo matemático deve conter a maior quantidade possível de detalhes para se descrever o sistema, sem torná-lo complexo além do necessário para cada análise de interesse. Assim, dependendo do comportamento de seus componentes, pode-se defini-lo como linear ou não linear e, conseqüentemente, o nível de complexidade ser alterado de forma significativa.

É comum em sistemas dinâmicos a ocorrência de condições de instabilidade. Afim de prevenir danos estruturais causados por esta ocorrência, podem ser utilizados dispositivos de controle. Tal controle estrutural pode acontecer através de dispositivos externos ou por ação de forças sobre a estrutura. Neste sentido, existem diversos tipos de dispositivos com esta finalidade e, comumente são classificados como passivos, ativos, híbridos e semi-ativos [2].

Contudo, neste trabalho apresenta-se um estudo do comportamento dinâmico de um sistema vibro-impacto, representado por um modelo físico de dois graus de liberdade proposto por Ing *et al.* [3]. São encontradas as regiões de estabilidade e instabilidade do sistema e, após se identificar os pontos de equilíbrio, propõe-se um mecanismo de controle através de um controlador linear ótimo (LQR, do inglês *Linear Quadratic Regulator*).

## 2. MODELO

O modelo físico adotado neste trabalho, representado na Fig. 1, é uma simplificação do modelo experimental considerado por Ing *et al.* [3]. O modelo consiste de um corpo de massa  $m$ , presa a uma base oscilante através de uma mola com coeficiente de rigidez  $k_1$  e um amortecedor viscoso com coeficiente de amortecimento  $c$ . No modelo existe uma segunda mola com coeficiente de rigidez  $k_2$ , após folga existente denominada  $\varphi$ . O corpo de massa  $m$  pode se deslocar em função da oscilação  $S=A\cdot\text{sen}(2\pi f t)$ , sendo  $f$  a frequência de oscilação e  $t$  o tempo. Quando a base sofre oscilação, faz com que a massa se desloque, impactando sobre a rigidez secundária, caracterizando assim, um sistema vibro-impactante.

Aplicando a Lei da Mecânica Clássica de Newton, escreve-se a equação de movimento conforme equação (1). O movimento do bloco é representado por  $z$ , e o movimento da base representado por  $s$ , portanto o movimento relativo entre a base oscilatória e o bloco será denominado como  $y = (z - s)$ .

Quando o movimento relativo  $y$  é menor ou igual a folga  $\varphi$ , observa-se que o sistema não sofre ação de impacto. A partir do momento em que o movimento  $y$  se torna maior que a folga, o sistema se torna impactante, e a rigidez  $k_2$  passa a agir sobre a estrutura. Então, existem duas situações distintas a serem consideradas, sistema impactante e sem impacto.

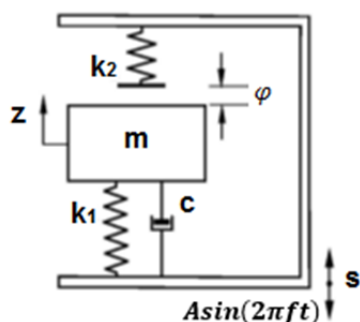


Fig. 1. Modelo vibro-impacto [3].

No caso sem impacto, representado pela equação 1, tem-se:

$$m\ddot{y} + k_1y + c\dot{y} = -m\ddot{S} \quad (1)$$

Também, no caso com impacto, indicado pela equação 2, tem-se:

$$m\ddot{y} + k_1y + k_2(y - \varphi) + c\dot{y} = -m\ddot{S} \quad (2)$$

Ainda, afim de expressar as equações (1) e (2) de forma adimensional, define-se:

$$\tau = \omega_o t \quad x = \frac{y}{y_o} \quad \omega = \frac{p}{\omega_o} \quad \omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_o}$$

onde  $\omega_o$  é a frequência natural de oscilação do sistema e  $\xi$  o fator de amortecimento do sistema linear associado, ou seja, sem a influência da folga.

Para o movimento relativo  $y$  é menor que a folga, tem-se

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + c \frac{dy}{dt} + k_1y = -m \frac{d^2S}{dt^2} \quad (3)$$

Como  $\frac{\tau}{t} = \omega_o$ , portanto, a equação (3) é reescrita, tal que:

$$m\omega_o^2 \frac{d^2y}{d\tau^2} + c\omega_o \frac{dy}{d\tau} + k_1y = -m\omega_o^2 \frac{d^2S}{d\tau^2} \quad (4)$$

Dividindo a equação por  $y_o$ , que representa uma distância de referência arbitrária e  $m\omega_o^2$ , tem-se:

$$\frac{\ddot{y}}{y_o} + \frac{c}{m\omega_o} \frac{\dot{y}}{y_o} + \frac{k_1}{m\omega_o^2} \frac{y}{y_o} = -\frac{\ddot{S}}{y_o} \quad (5)$$

Aplicando-se  $y = xy_o$ ,  $\frac{dy}{dx} = y_o \frac{dx}{dx}$ ,  $dy = y_o dx$ ,  $\ddot{y} = y_o \ddot{x}$ , tem-se:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m\omega_o} \dot{x} + \frac{k_1}{m\omega_o^2} x = -\frac{\ddot{S}}{y_o} \quad (6)$$

Conforme proposto, tem-se o movimento harmônico da base, dado por:

$$S = A \text{sen}(2\pi f t) \quad (7)$$

sendo  $2\pi f$  a frequência de excitação, representada por  $p$  em sua forma angular, e  $A$  é a amplitude da força de excitação. Assim, reescrevendo a função tem-se:

$$S = A \text{sen}(p t) \quad (8)$$

Também, considerando  $t = \frac{\tau}{\omega_o}$ , conforme definido previamente, tem-se:

$$S = A \text{sen}\left(p \frac{\tau}{\omega_o}\right) \quad (9)$$

Finalmente, como  $\omega = \frac{p}{\omega_o}$ , portanto a função equivalente ao movimento harmônico do sistema é:

$$S = A \text{sen}(\omega \tau) \quad (10)$$

Aplicando a derivada segundo na equação (10), tem-se:

$$\dot{S} = A\omega \text{cos}(\omega \tau) \quad (11)$$

$$\ddot{S} = -A\omega^2 \text{sen}(\omega \tau) \quad (12)$$

Substituindo  $\omega_o^2 = \frac{k_1}{m}$ ,  $2\xi = \frac{c}{m\omega_o}$  e  $\ddot{S} = -A\omega^2 \text{sen}(\omega \tau)$  na equação (6), tem-se:

$$\ddot{x} + 2\xi \dot{x} + x = \frac{A}{y_o} \omega^2 \text{sen}(\omega \tau) \quad (13)$$

Considerando  $a = \frac{A}{y_o}$  e isolando  $\ddot{x}$ , tem-se a equação de movimento harmônico sem atrito:

$$\ddot{x} = a\omega^2 \text{sen}(\omega\tau) - 2\xi\dot{x} - x \quad (14)$$

Aplicando o mesmo procedimento para a equação 2, considerando  $e = \frac{\varphi}{y_0}$  e  $\beta = \frac{k_2}{k_1}$ , tem-se a equação de movimento harmônico com impacto:

$$\ddot{x} = a\omega^2 \text{sen}(\omega\tau) - 2\xi\dot{x} - x - \beta(x - e) \quad (15)$$

Afim de criar uma função única, que represente as duas situações, é necessário a utilização de uma função auxiliar degrau. Esta função, denominada também função de Heaviside, aqui representada por  $H(x - e)$ , tem valor 1 quando  $(x - e) > 0$ , e valor 0 quando  $(x - e) \leq 0$ .

Logo a equação única é:

$$\ddot{x} = a\omega^2 \text{sen}(\omega\tau) - 2\xi\dot{x} - x - \beta(x - e)H(x - e) \quad (16)$$

Fazendo  $\dot{x}_1 = x_2$ , e  $\ddot{x}_1 = \dot{x}_2$ , temos:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a\omega^2 \text{sen}(\omega\tau) - 2\xi x_2 - x_1 - \beta(x_1 - e)H(x_1 - e) \end{cases} \quad (17)$$

### 3. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

As simulações foram feitas utilizando o software Octave, através do integrador numérico Runge-Kutta de quarta ordem, com passos de tempo e frequência automáticos. As condições iniciais utilizadas nas simulações foram extraídas de Ing *et al.* [3], e estão apresentadas na tabela 1.

#### 3.1. Análise do Sistema para $\omega = 0,906$

A Fig. 2 ilustra o comportamento estável do sistema dinâmico com as projeções dos planos de fases, históricos no tempo, espectros de frequência e mapa de Poincaré para o modelo abordado.

As Figuras 2a e 2b apresentam o histórico no tempo para deslocamento e velocidade, respectivamente, ambos em função do tempo. Nota-se que, nesta frequência de excitação, existem frequências menores nos diagramas, porém, sem grandes interferências na estabilidade do comportamento do oscilador. Considera-se então que o comportamento é periódico no decorrer do tempo.

As Figuras 2c e 2d apresentam os espectros de frequência para deslocamento e velocidade, respectivamente. É possível observar nos dois diagramas que há uma frequência predominante na faixa de 0,2.

A Figura 2e apresenta o plano de fase, que é a relação entre as coordenadas generalizadas, velocidade e deslocamento. No diagrama há a predominância de apenas uma frequência, representada pelas linhas mais escuras do gráfico. É possível observar também frequências de menor intensidade, porém não se mostram dominantes. O movimento apresentado no diagrama é periódico estável (sem perturbações no sistema).

Tabela 1. Parâmetros adimensionais utilizados nas simulações computacionais.

Parâmetros	Valores
$a$	0,3
$\omega$	0,906; 0,996
$\tau$	0-100
$\xi$	0,01
$\beta$	29
$e$	1,26

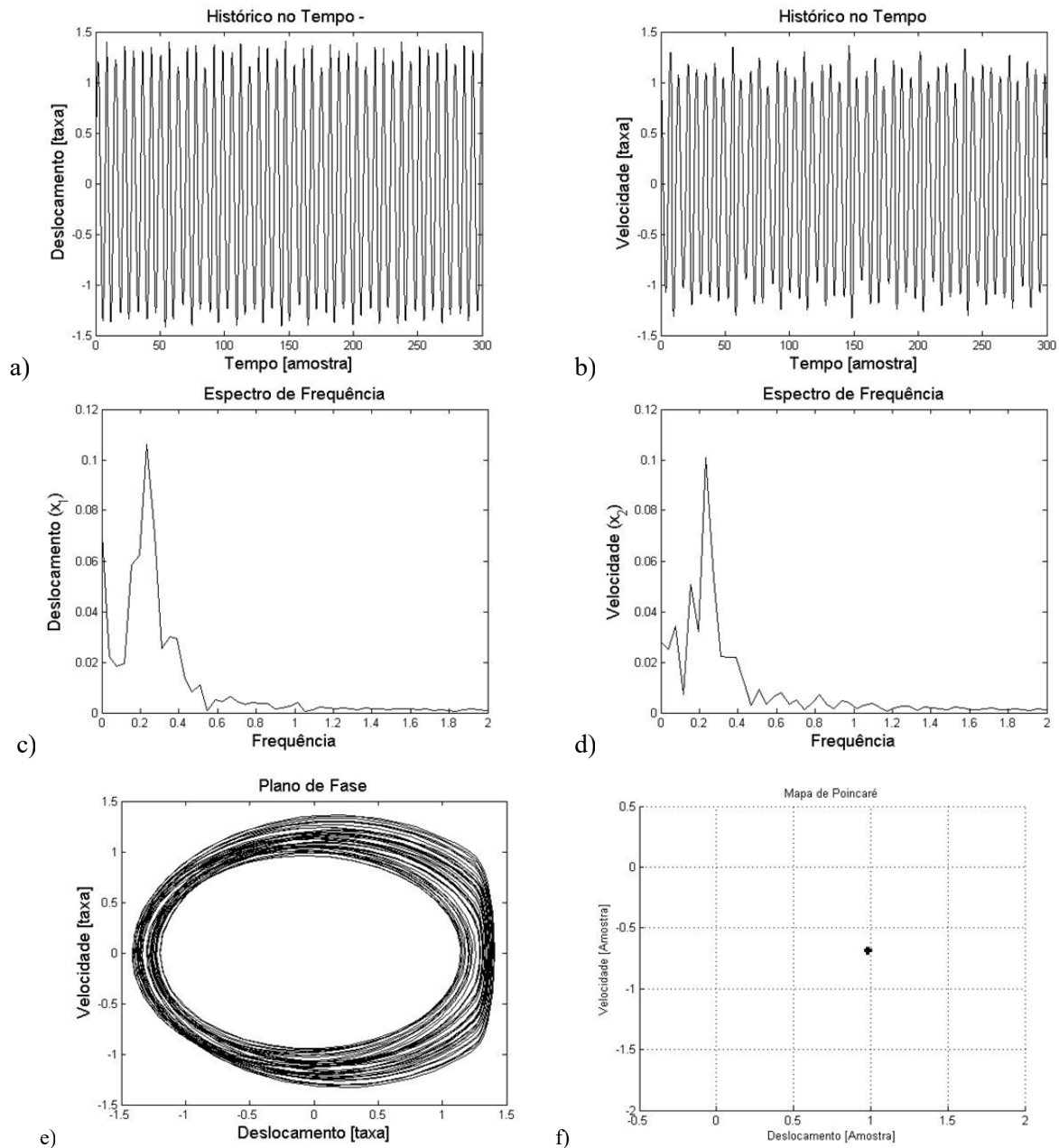


Fig. 2. Comportamento da Estrutura. a) Deslocamento versus tempo, b) Velocidade versus tempo, c) Deslocamento versus frequência. d) Velocidade versus frequência, e) Plano de Fase e f) Mapa de Poincaré.

A Figura 2f apresenta o mapa de Poincaré. Pode-se identificar apenas um ponto de intersecção, ou seja, comprova a existência de somente uma frequência principal na dinâmica estável do oscilador.

### 3.2. Análise do Sistema para $\omega = 0,996$

A Fig. 3 ilustra o comportamento estável do sistema dinâmico com as projeções dos planos de fases, históricos no tempo, espectros de frequência e mapa de Poincaré para o modelo abordado.

As Figuras 3a e 3b apresentam o histórico no tempo para deslocamento e velocidade, respectivamente, ambos em função do tempo. Nos diagramas é possível notar a presença de três frequências distintas, que se mostram significativas com relação à dinâmica do sistema.

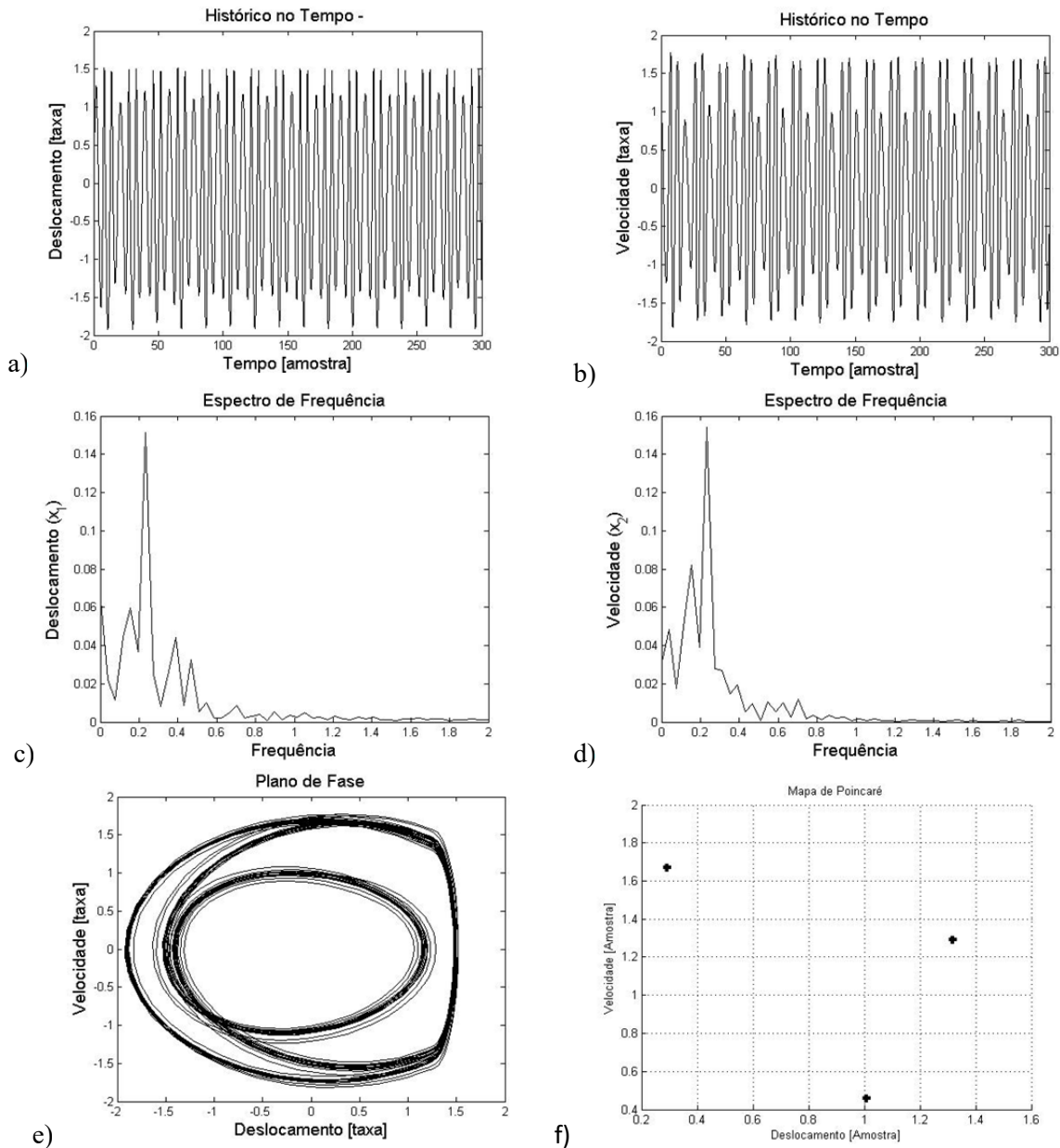


Fig. 3. Comportamento da Estrutura. a) Deslocamento versus tempo, b) Velocidade versus tempo, c) Deslocamento versus frequência. d) Velocidade versus frequência, e) Plano de Fase e f) Mapa de Poincaré.

As Figuras 3c e 3d apresentam os espectros de frequência para deslocamento e velocidade, respectivamente. É notório que há a recorrência de três frequências distintas no sistema, sendo a maior 0,23, seguida da segunda com 0,16 e a terceira 0,04.

A Figura 3e apresenta o plano de fases, mostrado na forma de velocidade em função do deslocamento. Nota-se que no diagrama, e segundo os autovalores da matriz de equilíbrio,  $\lambda_{1,2} = -0,0100 \pm 0,9999i$ , o movimento é periódico e estável com três frequências distintas e bem definidas neste ponto.

A Figura 3f apresenta o mapa de Poincaré. Através do diagrama é possível confirmar a existência de três frequências distintas, pois há três pontos de intersecção das trajetórias.

### 3.3. Expoentes de Lyapunov

Uma considerável dependência do sistema pelas suas condições iniciais pode ser quantificada pelos expoentes de Lyapunov. Esses expoentes medem a taxa exponencial média de divergência da vizinhança de

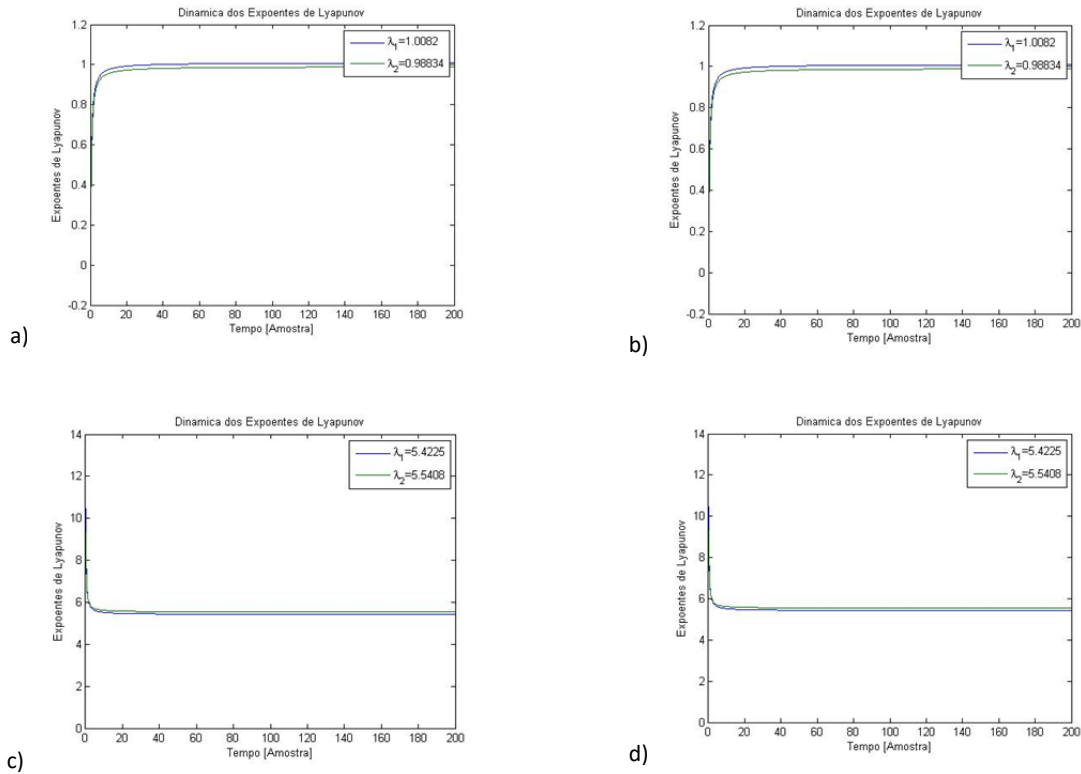


Fig. 4. Expoentes de Lyapunov.

determinada trajetória. Esta definição é fundamental para caracterização do caos em sistemas dinâmicos [4].

É importante salientar que o método dos expoentes de Lyapunov faz uma predição do comportamento que o sistema assume com a sua evolução no tempo, enquanto que a estabilidade estrutural analisa o sistema pontualmente dados os parâmetros de excitação e um tempo específico.

Nas subseções seguintes, é apresentada a evolução temporal dos coeficientes de Lyapunov, para a combinação de deslocamento e velocidade.

### 3.3.1. Deslocamento 1, velocidade 0

Na Figura 4a, é apresentada a evolução dos coeficientes de Lyapunov para um intervalo de 200 amostras de tempo (taxa), com passos de 0,01. Os coeficientes de Lyapunov se apresentaram de forma positiva em toda a evolução do tempo, isto evidencia que o comportamento dinâmico do sistema no decorrer do tempo tende ao caos.

### 3.3.2. Deslocamento 0, velocidade 1

Nestas condições, os autovalores evoluem de forma idêntica da subseção anterior, ou seja, evolui rapidamente até aproximadamente 15 amostras de tempo (taxa), a partir daí se mantém estável até o final do tempo, como ilustra a Figura 4b.

### 3.3.3. Deslocamento 2, velocidade 0

Observando o conjunto de autovalores da Figura 4c, é notório um pico de crescimento positivo logo no início. Após esse pico os valores caem, e se estabilizam, sofrendo pouca alteração até o final do intervalo. Os coeficientes de Lyapunov se apresentaram de forma positiva em toda a evolução do tempo, isto evidencia que o comportamento dinâmico do sistema no decorrer do tempo tende ao caos.

### 3.3.4. Deslocamento 2, velocidade 2

Nessas condições (Figura 4d), os coeficientes de Lyapunov se apresentaram de forma positiva em toda a evolução do tempo, isto evidencia que o comportamento dinâmico do sistema no decorrer do tempo tende ao caos.

## 4. PROJETO DE CONTROLE LINEAR ÓTIMO (LQR)

É importante notar-se que na teoria do controle existem dois tipos de problemas: o controle de programa e a síntese do controle. Para o primeiro, a função do controle  $u(t)$  é encontrada como uma função do tempo, ou seja, nesse caso a função de controle ótimo determina uma trajetória ótima que corresponde a uma condição inicial dada do sistema. No segundo caso, a função de controle  $u(t,x)$  depende do tempo e de variáveis de estado. Este tipo de controle é chamado *controle feedback*, ou controle com realimentação, podendo ser aplicado para qualquer condição inicial. Se as variáveis do sistema são desvios do regime desejado, o controle ótimo estabiliza em torno da trajetória desejada, minimizando o funcional que caracteriza os desvios quadrados da trajetória e do controle do regime desejado.

### 4.1. Aplicação do controle no modelo proposto

Aplicando a técnica do controle linear ótimo no modelo do sistema de equações 17, as equações do sistema controlado podem ser descritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + U \\ \dot{x}_2 = a\omega^2 \text{sen}(\omega\tau) - 2\xi x_2 - x - \beta(x - e)H(x - e) + U \end{cases} \quad (18)$$

Determina-se de forma iterativa os valores de  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R} = 1$ , e fixa-se valores para  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.02 \end{bmatrix}$ , onde a controlabilidade do sistema é  $M|B|AB|ABC|ABCD| \neq 0$ , considerando então que o sistema dinâmico é controlável. A matriz  $P$  é obtida por:

$$P = \begin{bmatrix} 1,8924 & 0,4142 \\ 0,4142 & 1,3323 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Resolvendo a equação algébrica de Riccati a função de controle ótimo  $u$  tem a seguinte forma:

$$u = (0,4142x_1 \ 1,3323x_2) \quad (20)$$

### 4.2. Análise do sistema controlado para $\omega = 0,906$

A Fig. 5 ilustra o comportamento do sistema controlado, através do histórico no tempo (deslocamento e velocidade) e Mapa de Poincaré para uma frequência de  $\omega = 0,906$ .

Nas Figuras 5a e 5b, é possível observar novamente, que a amplitude teve uma considerável redução, quando comparado com o sistema sem controle. O sistema então se apresenta de forma estável e periódico, com a dominância de uma única frequência principal.

No diagrama da Figura 5c, observa-se uma redução na orbita das trajetórias de velocidade, porém continua se comportando de forma periódica.

### 4.3. Análise do sistema controlado para $\omega = 0,996$

A Fig. 6 ilustra o comportamento do sistema controlado, através do histórico no tempo (deslocamento e velocidade) e Mapa de Poincaré para uma frequência de  $\omega = 0,996$ .

Nas Figuras 6a e 6b, é possível observar novamente, que a amplitude teve uma considerável redução, quando comparado com o sistema sem controle, além de sair de três picos distintos de velocidade e deslocamento para apenas um. Portanto é evidenciado um movimento periódico e estável, com somente uma frequência principal dominante.



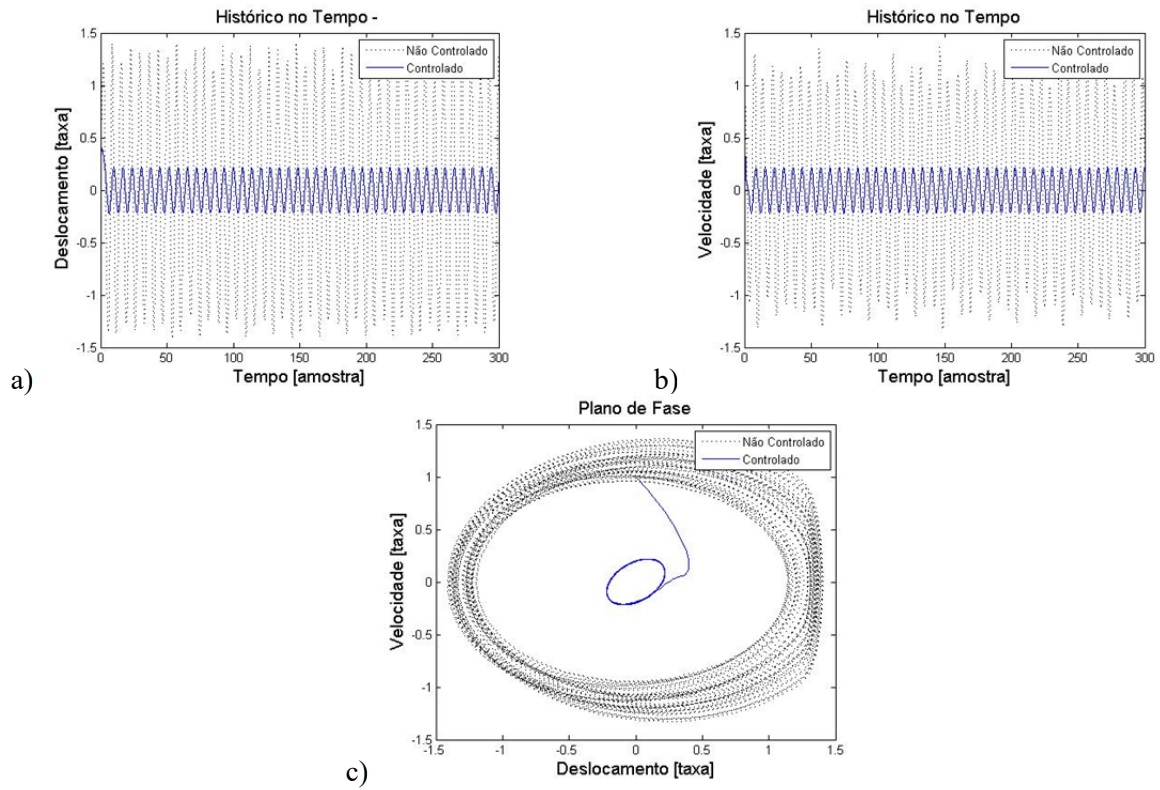


Fig. 5. Comportamento da Estrutura Com Controle LQR. a) Deslocamento versus tempo, b) Velocidade versus tempo, c) Plano de Fase.

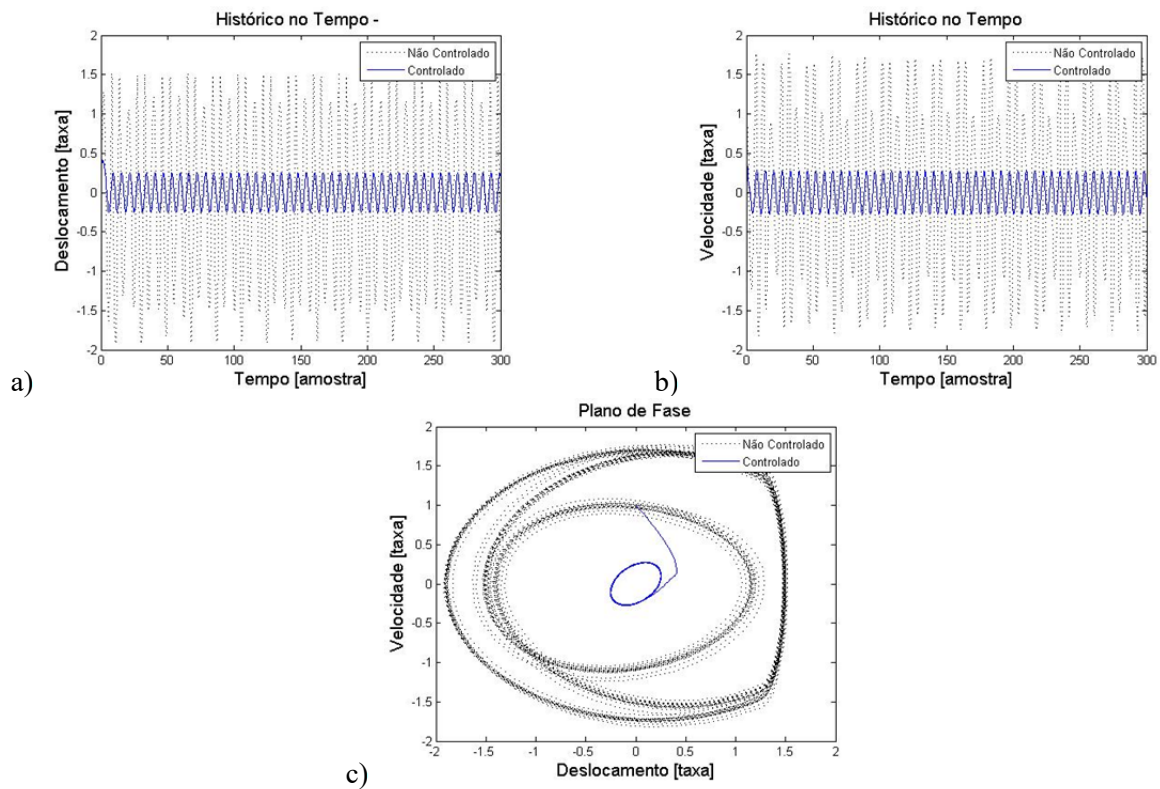


Fig. 6. Comportamento da Estrutura Com Controle LQR. a) Deslocamento versus tempo, b) Velocidade versus tempo, c) Plano de Fase.

No diagrama da Figura 6c, observa-se que as trajetórias que antes tinham três períodos, após a implementação do controle, passam a se apresentar com apenas um período nas trajetórias, continuando a se comportar de forma periódica.

## 5. DISCUSSÕES E CONCLUSÕES

Analisando o comportamento do sistema segundo as condições da tabela 1, observa-se que para a frequência  $\omega = 0,906$ , a oscilação acontece de forma periódica e estável.

Nas simulações para frequência de  $\omega = 0,996$ , nota-se a ocorrência de três frequências dominantes distintas, mas que, segundo a análise de estabilidade estrutural, neste ponto a estabilidade é assintoticamente estável.

Nas análises dos coeficientes de Lyapunov, observou-se que a variação da velocidade não interfere na variação dos autovalores, os valores de deslocamento e rigidez, interferem pouco nos expoentes, já que estão relacionados aos valores de  $H$  e  $\delta$ , que tendem a 0 ou 1 conforme as condições impostas por  $x$ . O termo correspondente a folga adimensional  $e$ , interfere apenas na condição de impacto do sistema, através da relação com o deslocamento. Finalmente, observou-se através de simulações não apresentadas, que um fator de amortecimento  $\xi$  apresenta considerável influência na variação temporal dos expoentes de Lyapunov, pois é um termo independente no sistema de equações e que interfere diretamente na resposta dinâmica do sistema.

Analisando o sistema como um todo, conclui-se que este tem comportamento periódico e estável segundo as considerações pontuais de estabilidades, mas apresenta indícios de caos segundo as avaliações temporais dos expoentes de Lyapunov.

Para todas as condições iniciais impostas no cálculo dos expoentes de Lyapunov, foi observado a ocorrência de caos no sistema. Portanto, a proposta principal deste trabalho, a partir deste ponto, é inserir um controlador linear ótimo (LQR) no sistema, afim de eliminar as instabilidades e manter a integridade do mecanismo.

O controlador linear ótimo (LQR), se apresentou como boa alternativa de controle do sistema. Após sua implementação, para todas as condições testadas, houve uma considerável redução na amplitude de resposta da estrutura. Portanto, observa-se que o sistema controlado, em todas as situações, apresenta-se de forma estável, atendendo assim, a proposta de controle do trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Laboratório de Sistemas Complexos (SISPLEXOS) onde o projeto foi desenvolvido.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Aguiar, R.R., Desenvolvimento de um dispositivo gerador de vibro-impacto. Dissertação (Mestrado)– Faculdade de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica.- PUC - Rio, Rio de Janeiro, Brasil (2006)
- [2] Beneveli, S.M.Á. Atenuação de vibrações em edifícios. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica- PUC-Rio, Rio de Janeiro (2002)
- [3] Ing, J. *et al.*, “Experimental study of impact oscillator with one-sided elastic constraint”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **366**(1866), 679-705 (2008)
- [4] Kapitaniak, T., *Chaotic oscillations in mechanical systems*, Manchester University Press (1991)
- [5] Monteiro, L.H.A., *Sistemas dinâmicos*, São Paulo: Livraria da Física (2011)
- [6] Moraes, F.H., Comportamento dinâmico não-linear de um sistema mecânico com vibrações associadas a uma transição brusca na rigidez. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista- UNESP, Bauru (2012)
- [7] Peterka, F., Vacik, J., “Transition to chaotic motion in mechanical systems with impacts”, *Journal of Sound and Vibration*, **154**(1), 95-115 (1992)

- [8] Rao, S.S., *Vibrações mecânicas*, São Paulo, Pearson Prentice Hall (2012)

### **SUPPRESSION OF CHAOS IN A VIBRATION - IMPACT SYSTEM USING THE LINEAR OPTIMAL CONTROL PROJECT**

**Abstract** –Mechanical vibrations are common in engineering equipment and can be observed in the form of accelerations, displacements and speed. Mechanical vibrations, in most dynamic systems, are considered as unwanted and can be harmful. However, there are situations that are used to improve the operation and performance of machines. There are several causes of vibrations in engineering systems, in this work, the vibrations caused by impact are highlighted. When systems are impacting each other, they are characterized by vibro - impact systems. Various equipment with these characteristics can be mentioned, such as soil compacting rollers, impact hammers, soil drills, etc. In this work, the dynamic behavior of a vibro-impacting system is demonstrated. From the variation of the excitation frequency, the chaotic behavior was observed. Thus, the design of an optimal linear controller was developed to attenuate the vibrations in the operational regions in which the system is unstable. It has been shown that a good linear control strategy demonstrates this type of situation and can be used to reduce damages, avoiding economic losses, biological and material losses.

**Keywords:** Stability analysis, Chaos, Optimal linear control, Numerical simulation, Mechanical vibrations.